**Практическое занятие №55.** Применение интеграла к вычислению площадей.

Цель работы: формирование навыков применения определенного интеграла к вычислению площадей.

**Основные теоретические сведения**

Фигура, изображённая на рисунке является криволинейной трапецией



Определение

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная сверху графиком непрерывной функции *y=f(x),* снизу отрезком [a;b] оси Ох, а с боков отрезками прямых *х=а, х=b*

Площадь криволинейной трапеции можно вычислить с помощью определённого интеграла

, где F(x) – любая первообразная функции f(x).



Возможно такое расположение:

S = S1 +S2



Возможен следующий случай, когда *f(x)*< 0 на [а,b]



Возможно и такое расположение

S=
*Задачи на вычисление площадей плоских фигур можно решать по следующему плану:*

1. по условию задачи делают схематический чертёж;
2. представляют искомую фигуру как сумму или разность площадей криволинейных трапеций (при необходимости). Из условия задачи и чертежа определяют пределы интегрирования для каждой составляющей криволинейной трапеции.
3. записывают каждую функцию в виде 
4. вычисляют площадь каждой криволинейной трапеции и искомой фигуры.

|  |
| --- |
| **Пример 1.**Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image002.gif.И **первый важнейший этап** **решения**состоит как раз в**построении чертежа**. При этом я рекомендую следующий порядок: **сначала** лучше построить все прямые (если они есть) и только **потом** – параболы, гиперболы, графики других функций.В нашей задаче: прямая https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image004.gif определяет ось https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image006.gif, прямые https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image008.gif параллельны оси https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image010.gif и парабола https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image012.gif симметрична относительно оси https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image010_0000.gif, для неё находим несколько опорных точек:https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image015.jpgИскомую фигуру желательно штриховать:https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image017.jpg**Второй этап** состоит в том, чтобы **правильно составить** и **правильно вычислить** определённый интеграл. На отрезке https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image019.gif  график функции https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image021.gif расположен **над осью https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image006_0000.gif**, поэтому искомая площадь:https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image024.gif**Ответ**:**https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image026.gif****После того, как задание выполнено, полезно взглянуть на чертёжи прикинуть, реалистичный ли получился ответ.**И мы «на глазок» подсчитываем количество заштрихованных клеточек – ну, примерно 9 наберётся, похоже на правду. Совершенно понятно, что если бы у нас получилось, скажем, 20 квадратных единиц, то, очевидно, где-то допущена ошибка – в построенную фигуру 20 клеток явно не вмещается, от силы десяток. Если ответ получился отрицательным, то задание тоже решено некорректно.**Пример 2.**Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image031.gif, https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image033.gif и координатными осями.**Решение**: найдём несколько опорных точек для построения экспоненты (-ех):https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image035.jpgи выполним чертёж, получая фигуру площадью около двух клеток:https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image037.jpgЕсли криволинейная трапеция расположена **не выше**оси **https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image006_0003.gif**, то её площадь можно найти по формуле: https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image039.gif.В данном случае: https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image041.gif**Ответ**: https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image043.gif**Пример 3.**Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image045.gif, https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image047.gif**Решение**: сначала нужно выполнить чертеж, при этом нас особо интересуют точки пересечения параболы https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image045_0000.gif и прямой https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image047_0000.gif, поскольку здесь будут находиться пределы интегрирования.  Составим и решим уравнение:https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image051.gifтаким образом:https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image053.gifПрямую https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image047_0001.gif необходимо построить по двум точкам, а вот для построения параболы удобно найти её вершину, для этого возьмём производную и приравняем её к нулю:https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image055.gif – именно в этой точке и будет находиться вершина. И, в силу симметрии параболы, остальные опорные точки найдём по принципу «влево-вправо»:https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image057.jpgВыполним чертеж:https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image059.jpg**А теперь рабочая формула:** если на отрезке https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image061.gif некоторая непрерывная функция https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image063.gif **больше либо равна** непрерывной функции https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image065.gif, то площадь фигуры, ограниченной графиками этих функций и отрезками прямых https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image067.gif, можно найти по формуле:https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image069.gifЗдесь уже не надо думать, где расположена фигура – над осью или под осью, а, грубо говоря, **важно, какой из двух графиков ВЫШЕ**.В нашем примере очевидно, что на отрезке https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image071.gif парабола располагается выше прямой, а поэтому из https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image073.gif нужно вычесть https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image075.gifЗавершение решения может выглядеть так:На отрезке https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image077.gif: https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image079.gif, по соответствующей формуле:https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image081.gif**Ответ**:**https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/f/1_8_kak_vychislit_ploshad_figury_s_pomoshyu_opredelennogo_integrala_clip_image083.gif**Видеоурок по теме <https://resh.edu.ru/subject/lesson/4037/main/269554/> |

**Задания для выполнения:**

|  |  |
| --- | --- |
|  ***Вариант 1***  | ***Вариант 2*** |
| **Найти площадь фигуры, ограниченной линиями** |
| а) параболой у = (х + 1)2 , прямой у = 1 – х и осью Ох.б) параболой у = х2 – 4х +3 и осью Ох. | а) параболой у = х ( 2 – х ) и осью Ох.б) параболой у = 6 х - х2 и прямой у = х - 4 . |