Записать себе в тетрадь и выполнить всё, что выделила красным - ЭТО БУДЕТ В БИЛЕТЕ всё остальное можно просто изучить, почитать. Выполненные работы как всегда прислать по адресу PetrovaT.D.1@yandex.ru

Практическая работа №20

**ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА**

|  |
| --- |
| ***Основные понятия и формулы*** |
| **Форма задания закона распределения** |
| Ряд распределения |  |
| Многоугольник распределенияФункция распределения (интегральная функция распределения) |  |  |
| **Основные числовые характеристики и их свойства** |
| Математическое ожидание:$$М\left(Х\right)=\sum\_{i=1}^{n}p\_{i}x\_{i}$$ | *М(С) = С**М(СХ) = С·М(Х)**М(Х1 + Х2 + …+ Хn) = М(Х1) + М(Х2) + ... + М(Хn)**М(Х1 · Х2 · ... · Хn) = М(Х1) · М(Х2) ·...· М(Хn)* |
| Дисперсия:$$D\left(X\right)=\sum\_{}^{}p\_{i}\left(x\_{i}-M\left(X\right)\right)^{2}$$$$D\left(X\right)=\sum\_{}^{}p\_{i}x\_{i}^{2}-(M(X))^{2}$$ | *D(С) = 0**D(СХ) = С2 · D(Х)**D(Х1 ± Х2 ± ... ± Хn) = D(Х1) + D(Х2) + ... + D(Хn)* |
| Среднее квадратичное отклонение(среднее квадратическое отклонение) | $$σ\left(Х\right)=\sqrt{D(X)}$$ |
| **Основные законы распределения** |
| Биномиальное | Геометрическое | Гипергеометрическое | Пуассона |

**Форма задания закона распределения**

Для дискретной случайной величины *Х* простейшей формой задания закона распределения является ***ряд распределения***, представляющий собой таблицу, в верхней строке которой указаны возможные значения $x\_{i}$, а в нижней – соответственно вероятности $p\_{i}$того, что *Х* примет значение $x\_{i}$.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | $$x\_{1}$$ | $$x\_{2}$$ | … | $$x\_{n}$$ |
| *р* | $$p\_{1}$$ | $$p\_{2}$$ | … | $$p\_{n}$$ |

При построении ряда распределения необходимо помнить, что:

1. 0$\leq p\_{i}\leq 1$ по свойству вероятности;
2. $\sum\_{}^{}p\_{i}=1$, т.к. события $x\_{i}$ составляют полную группу попарно несовместных событий.

Закон распределения также может быть задан аналитически (формулой) и графически :***многоугольником распределения***, соединяющим точки ($x\_{i}$; $p\_{i}$). Пример многоугольника распределения приведен на рис. 1.

Другим способом представления закона распределения дискретной случайной величины является ***функция распределения*** (интегральная функция). Функция распределения ***F(X)*** - это вероятность того, что случайная величина *Х* примет значение меньшее, чем *конкретное* числовое значение *x*:*F(X) = P(Х < х).*Для дискретной случайной величины функция распределения вычисляется для каждого значения как сумма вероятностей, соответствующих всем предшествующим значениям случайной величины (см. рис. 2). Поэтому функция распределения – неубывающая, она принимает значения в интервале от 0 до 1.

*Пример 1. Задан закон распределения случайной величины Х. Построить многоугольник распределения и функцию распределения.*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | *-2* | *-1* | *0* | *1* | *2* |
| *р* | *0,1* | *0,2* | *0,5* | *0,1* | *0,1* |
| http://natalymath.narod.ru/images/theory2/2t8.png | http://natalymath.narod.ru/images/theory2/2t7.png | http://natalymath.narod.ru/images/theory2/2t9.png |
| *Рис. 1. Многоугольник распределения.* | *Рис. 2. Функция распределения (интегральная функция распределения).* |

Закон распределения случайной величины является ее исчерпывающей характеристикой. Но при решении многих практических задач нет необходимости указывать закон распределения, а можно обойтись основными числовыми характеристиками.

**Основные числовые характеристики**

Основную роль при решении практических задач играют математическое ожидание, задающее "центральное" значение случайной величины, и дисперсия, характеризующая разброс значений случайной величины вокруг математического ожидания.

***Математическое ожидание*** дискретной случайной величины есть сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности:$М\left(Х\right)=\sum\_{}^{}p\_{i}x\_{i}$.

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой величине: *М(С) = С.*
2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

*М(СХ) = С·М(Х)*.

1. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых: *М(Х1 + Х2 + …+ Хn) = М(Х1) + М(Х2) + ... + М(Хn).*
2. Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

*М(Х1 · Х2 · ... · Хn) = М(Х1) · М(Х2) · ... · М(Хn).*

***Дисперсия*** дискретной случайной величины есть математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$D\left(X\right)=\sum\_{}^{}p\_{i}(x\_{i}-M\left(X\right))^{2}$. Чаще используют формулу: $D\left(X\right)=\sum\_{}^{}p\_{i}x\_{i}^{2}-(M(X))^{2}$.

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю: *D(С) = 0*.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат: *D(СХ) = С2 · D(Х).*
3. Дисперсия суммы (разности) независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых: *D(Х1 ± Х2 ± ... ± Хn) = D(Х1) + D(Х2) + ... + D(Хn).*

***Среднее квадратичное отклонение*** дискретной случайной величины, оно же стандартное отклонение или среднее квадратическое отклонение есть корень квадратный из дисперсии:$σ\left(Х\right)=\sqrt{D(X)}$. Среднее квадратичное отклонение было введено как дополнительная характеристика рассеяния значений случайной величины вокруг ее математического ожидания и, в отличие от дисперсии, совпадающая по размерности со случайной величиной.

*Пример 2. Задан закон распределения случайной величины (см. пример 1). Определить ее основные числовые характеристики.*

*M(X) = -2·0,1 - 1·0,2 + 0·0,5 + 1·0,1 + 2·0,1 = -0,1*

*D(X) = (-2 + 0,1)2·0,1 + (- 1 + 0,1)2·0,2 + (0 + 0,1)2·0,5 + (1 + 0,1)2·0,1 + (2 + 0,1)2·0,1 = 1,09*

*или D(X) = (-2)2·0,1 + (-1)2·0,2 + 02·0,5 + 12·0,1 + 22·0,1 - (-0,1)2 = 1,1 - 0,01 = 1,09*

*σ =* $\sqrt{1,09}$ *≈ 1,04*

 *Пример 3.M(X) = 5,6; D(X) = 3,04. Вычислить M(Y) и D(Y), если Y = 3Х + 2.*

*M(Y) = 3M(X) + 2 = 3 · 5,6 + 2 = 18,8*

*D(Y) = 32·D(X) + 0 = 9 · 3,04 = 27,36*

**Основные законы распределения**

***Биномиальное распределение***– закон распределения дискретной случайной величины *Х*, представляющей собой число *m* наступлений события *А* в серии *n*независимых испытаний, в каждом из которых событие может произойти с одной и той же вероятностью *р*.Вероятности $p\_{i}$вычисляют по формуле Бернулли (где *q = 1 - p*):

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x\_{i}$$ | 0 | 1 | … | m | … | n |
| $$p\_{i}$$ | $$q^{n}$$ | $$C\_{n}^{1}pq^{n-1}$$ | … | $$C\_{n}^{m}p^{m}q^{n-m}$$ | … | $$p^{n}$$ |

 Для биномиального распределения:*M(X) = np, D(X) = npq*.

*Пример 4. Построить ряд распределения числа попаданий мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания при одном броске равна 0,6. Найти среднее число попаданий и дисперсию. Случайная величина Х – число попаданий в корзину при трех бросках, имеет биномиальный закон распределения.*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| http://natalymath.narod.ru/images/theory2/2t10.png |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x\_{i}$$ | *0* | *1* | *2* | *3* |
| $$p\_{i}$$ | *0,064* | *0,288* | *0,432* | *0,216* |

 *Контроль: 0,064+0,288+0,432+0,216=1**M(X)= 3·0,6 = 1,8**D(X) = 3·0,6·0,4 = 0,72**σ(X) = 0,85* |

***Геометрическое распределение.*** Производится серия испытаний. Случайная величина *Х* - количество испытаний до появления первого успеха (например, бросание мяча в корзину до первого попадания). Закон распределения имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x\_{i}$$ | *1* | *2* | *3* | *…* | *k* | *…* |
| $$p\_{i}$$ | *p* | *qp* | *qp2* | *…* | *qpk-1* | *…* |

Если количество испытаний не ограничено, т.е. если случайная величина может принимать значения 1, 2, ..., ∞, то математическое ожидание и дисперсию геометрического распределения можно найти по формулам:*M(X) = 1/p, D(X) = q/p2.*

*Пример 5. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель p = 0,6 при каждом выстреле. Случайная величина X - число возможных выстрелов до первого попадания, имеет геометрическое распределение. а) Составить ряд распределения, найти функцию распределения, построить ее график и найти все числовые характеристики. б) Найти математическое ожидание и дисперсию для случая, если стрелок намеревается произвести не более трех выстрелов.*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x\_{i}$$ | *1* | *2* | *3* | *…* | *k* | *…* |
| $$p\_{i}$$ | *0,6* | *0,24* | *0,096* | *…* | *0,4· 0,6 k-1* | *…* |

|  |  |
| --- | --- |
|  | *M(X) = 1/0,6 = 1,667**D(Х)=0,4/0,36 = 1,111**σ(Х) = 1,054* |
| *Рис. 3. Функция распределения.* |

***Гипергеометрическое распределение.*** Имеется *N* объектов. Из них *n* объектов обладают требуемым свойством. Из общего количества отбирается *m* объектов. Случайная величина *X* - число объектов из *m* отобранных, обладающих требуемым свойством. Закон распределения имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x\_{i}$$ | *0* | *1* | *2* | *…* | *k* | *…* |
| $$p\_{i}$$ | $$\frac{C\_{n}^{0}∙C\_{N-n}^{m}}{C\_{N}^{0}}$$ | $$\frac{C\_{n}^{1}∙C\_{N-n}^{m-1}}{C\_{N}^{1}}$$ | $$\frac{C\_{n}^{2}∙C\_{N-n}^{m-2}}{C\_{N}^{2}}$$ | *…* | $$\frac{C\_{n}^{k}∙C\_{N-n}^{m-k}}{C\_{N}^{k}}$$ | *…* |

*М(X) = nm /NиD(X) = nm(1-m /N)(1-n/N) / (N-1)*

*Пример 6. Среди 20 книг, стоящих на полке, 8 книг по математической статистике. Случайная величина X - число книг по математике из четырех случайно взятых с этой полки книг. Составить ряд распределения, найти функцию распределения, построить ее график и найти числовые характеристики.*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х* | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* |
| *р* | *0,1022* | *0,3633* | *0,3814* | *0,1387* | *0,0114* |

*Контроль: 0,1022+0,3633+0,3814+0,1387+0,0114 = 1.*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| *Рис. 4. Многоугольник распределения.* | *Рис. 5. Функция распределения.* |

*M(X) = 8∙4/20 = 1,6; D(X) = 8∙4(1- 4/20)(1- 8/20) / (20 - 1) = 0,81; σ(X) = 0,9 .*

***Задачи для самостоятельной работы***

*Задача 1.* Найти числовые характеристики случайной величины Х, заданной законом распределения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *а)* | *Х* | *4,3* | *5,1* | *10,6* | *-* |
| *р* | *0,2* | *0,3* | *0,5* | *-* |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *б)* | *Х* | *131* | *140* | *160* | *180* |
| *р* | *0,05* | *0,10* | *0,25* | *0,60* |

*Задача 2.* Найти математическое ожидание случайной величины *Z*, если известны математические ожидания *Х* и *Y*:

*а) Z = X + 2Y, M(X) = 5, M(Y) = 3. б) Z = 3X + 4Y, M(X) = 2, M(Y) = 6.*

*Задача 3.* Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины *Х*: *х1= -1, х2=0, х3=1*, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: *M(X)=0,1* и*M(X2)=0,9*. Найти вероятности *р1, р2, р3*, соответствующие возможным значениям *Х*.