**Практическая работа№12**

**Множества и отношения.**

**Цель:** выработать навыки решения примеров содержащих множества и отношения.

**Теория.**

В математике стремятся к единообразию, и для обозначения совокупностей употребляется, как правило, единый термин – **множество**. Таким образом, множество рассматривается как совокупность предметов реального мира (или объектов нашей интуиции), обладающих общим свойством. Другими словами, множество – это совокупность предметов, сама рассматриваемая как один предмет. Дать определение множеству нельзя, можно лишь пояснить его.

Понятие множества является одним из основных понятий математики и поэтому не определяется через другие. Его можно пояснить на примерах. Так, можно говорить о множестве гласных букв русского алфавита, о множестве натуральных чисел, о множестве треугольников, множестве корней уравнения и т.д.

В разговорной речи термин «множество» всегда связывается с большим числом предметов. В теории множеств это не обязательно. Будем рассматривать и **бесконечные** множества, и множества, содержащие любое **конечное** число предметов, и даже множество, не содержащее ни одного предмета, - **пустое множество (**обозначают знаком**∅).**

Объекты, из которых состоит множество, называют его **элементами**.

Произвольные множества обозначают заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, D, …,Z, A1, A2, …, An. Элементы множества обозначают строчными буквами латинского алфавита: *a, b, c, d,…, z, a1, a2,…, an*.

Отношение между элементами и множеством выражают словами: «является элементом» или «принадлежит». Предложение «Элемент*a* принадлежит множеству A» обозначают . Если же *a* не является элементом множества A, то пишут .

Множества, элементами которых являются числа, называются **числовыми**. Для числовых множеств используют общепринятые обозначения:

N - множество натуральных чисел;

Z - множество целых чисел;

Q - множество рациональных чисел;

R - множество действительных чисел.

**СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВ**

Множество можно считать заданным, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит.

Множество можно задать **непосредственным перечислением** всех его элементов в произвольном порядке. В этом случае названия всех элементов множества записывают в строку, отделяют запятыми и заключают в фигурные скобки. Каждый элемент записывают только один раз. Порядок перечисления его элементов не существенен.

Например, множество А, состоящее из всех цифр, можно записать так:

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0};

Множество P букв, которые используют для записи слова «математика», записывают следующим образом:

P = {м, а, т, е, и, к}.

{1, 3, 7} и {3, 7, 1} - это одно и то же множество.

Перечислением элементов можно задать только конечное множество с небольшим числом элементов. Когда задать множество перечислением его элементов трудно или невозможно (в случае бесконечных множеств), то применяется другой способ задания множества через указание характеристического свойства его элементов.

**Характеристическим свойством**, определяющим множество, называется такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий данному множеству, и не обладает ни один элемент, ему не принадлежащий.

Например, запись B = {x | xZ, -2<x< 3} означает, что множество В состоит из целых чисел, больших -2 и меньших 3.

Второй способ более общий: он позволяет задавать и конечные, и бесконечные множества.

Часто одно и то же множество задано и первым, и вторым способами. Очень важно умение переходить от одного способа задания к другому.

Например, множество D натуральных чисел, меньших 7, заданное посредством указания характеристического свойства его элементов, можно задать и так: D = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, т.е. перечислив все его элементы.

В начальном курсе математики понятия множества и элементов множества в явном виде не изучаются, но в силу их большой общности они, по существу, пронизывают всю начальную математику. Так, при выполнении задания «Запишите числа, которые больше 65 и меньше 75» ученики встречаются с двумя способами задания одной и той же совокупности чисел. Один способ – указано свойство чисел «быть больше 65 и меньше 75», другой – числа этой совокупности перечисляются: 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74. Смысл упражнения – перейти от одного способа задания множества к другому. Аналогичные задачи приходится решать школьникам на других уроках, в частности на уроках русского языка: «Назовите все согласные буквы русского алфавита», «Подчеркните в данном упражнении все существительные», «Выпишите из текста все прилагательные» и т.д.

Два множества называют **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов. Например, множества K = {1, 2, 3, 4} и L = {x | xN, x<5} равны.

**СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ОТНОШЕНИЙ**

По определению отношение R между элементами множества Х есть всякое подмножество декартова произведения X × X, т.е. множество, элементами которого являются упорядоченные пары. Поэтому способы задания отношений такие же, как и способы задания множеств.

1.Отношение R на множестве Х можно задать, перечислив все пары элементов, взятых из множества Х и связанных этим отношением.

Формы записи при этом могут быть различными.

Например, некоторое отношение R на множестве X = {4, 5, 6, 7, 9} можно задать, записав множество пар: {(5, 4), (6, 4), (6, 5), (7, 4), (7, 5), (7, 6), (9, 4), (9, 5), (9, 6), (9, 7)}. Это же отношение можно задать при помощи графа.

2. Чаще отношение **R**на множестве Х задают, указав характеристическое свойство всех пар элементов, находящихся в отношении**R**. Это свойство формулируется в виде предложения с двумя переменными, хотя обозначения переменных иногда опускаются.

Например, среди отношений на множестве **N** натуральных чисел могут быть такие: «число ***х*** больше ***у***»; «число ***х*** – делитель числа ***у***», «число ***х*** меньше числа *у* в 3 раза» и другие.

В математике многие предложения с двумя переменными записывают, используя символы. Например, отношение «больше» для чисел может быть задано в виде неравенства ***x>y***, а отношение «число ***х*** меньше числа ***y***в 3 раза» - в виде равенства ***y = 3x***.

Для записи отношения параллельности, перпендикулярности прямых, подобия треугольников в геометрии используют особые символы: , , ~

Обобщением приведенных записей является запись ***xRy***, которая означает, что элемент ***x*** находится в отношении **R**с элементом ***y***.

**СВОЙСТВА ОТНОШЕНИЙ** Рассмотрим на множестве отрезков {a, b, c, d, e} отношения параллельности (при этом прямые будем считать параллельными, если они лежат в одной плоскости, не имеют общих точек или совпадают), перпендикулярности, равенства и «длиннее». После построения графов этих отношений выясним их особенности.

I. Графы отношений параллельности и равенства имеют петли, которые говорят о том, что, какой бы отрезок из множества Х мы ни взяли, о нем можно сказать, что он параллелен самому себе или что он равен самому себе.

Про отношения параллельности и равенства говорят, что они обладают свойством рефлексивности или, просто, что они рефлексивны.

Определение. Отношение **R** на множестве Х называется **рефлексивным**, если о любом элементе множества Х можно сказать, что он находится в отношении **R** с самим собой.

Данное определение можно записать короче:

**R** рефлексивно на **Х** ↔ ***xRx*** для любого ***х Х***

Если отношение**R**рефлексивно, то в каждой вершине графа имеется петля. Справедливо и обратное: граф, каждая вершина которого содержит петлю, представляет собой граф некоторого рефлексивного отношения.

Существуют отношения, которые свойством рефлексивности не обладают. Таким, например, является отношение перпендикулярности: нет ни одного отрезка , о котором можно сказать, что он перпендикулярен самому себе.

II .Особенность графов отношений параллельности, перпендикулярности и равенства заключается в том, что если есть одна стрелка, соединяющая пару элементов, то обязательно есть и другая, соединяющая те же элементы, но идущая в противоположном направлении. Эти стрелки говорят о том, что: 1) если первый отрезок параллелен второму отрезку, то и второй отрезок параллелен первому; 2) если первый отрезок перпендикулярен второму, то и второй отрезок перпендикулярен первому; 3) если первый отрезок равен второму отрезку, то и второй отрезок равен первому.

Про отношения параллельности, перпендикулярности и равенства говорят, что они обладают свойством симметричности или, просто, симметричны.

Определение. Отношение **R** на множестве **Х** называется **симметричным**, если из того, что элемент ***х*** находится в отношении **R** с элементом ***у***, следует, что и элемент ***у*** находится в отношении **R** с элементом ***х***.

Короче: **R** симметрично на **X**↔ ***xRy***→ ***yRx***

Граф симметричного отношения обладает особенностью: вместе с каждой стрелкой, идущей от ***х*** к ***у***, граф содержит и стрелку, идущую от ***у*** к ***х***. Справедливо и обратное утверждение: граф, содержащий вместе с каждой стрелкой, идущей от ***х*** к ***у***, и стрелку, идущую от ***у*** к ***х***, является графом симметричного отношения.

III. Существуют отношения, которые свойством симметричности не обладают. Таким, например, является отношение «длиннее» для отрезков.

Рассмотрим граф этого отношения. Его особенностью является то, что если стрелка соединяет две вершины, то она только одна. Про отношение «длиннее» говорят, что оно обладает свойством антисимметричности или, просто, антисимметрично.

Определение. Отношение **R** на множестве **Х** называется **антисимметричным,** если для различных элементов ***х*** и***у*** из множества **Х** из того, что элемент ***х*** находится в отношении **R** с элементом ***у***, следует, что элемент ***у*** в отношении **R** с элементом ***х*** не находится. \_\_\_\_

Короче: **R** антисимметрично на **X**↔ ***xRy*** и ***x*** ≠ ***y*** → ***yRx***

Граф антисимметричного отношения обладает особенностью: если две вершины графа соединены стрелкой, то эта стрелка только одна. Справедливо и обратное утверждение: граф, вершины которого соединены только одной стрелкой, является графом антисимметричного отношения.

Не следует думать, что все отношения делятся на симметричные и антисимметричные. Встречаются отношения, которые не обладают ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности.

IV. Обратим внимание еще на одну особенность графов отношений параллельности, равенства и «длиннее»: если стрелка идет от первого элемента ко второму и от второго – к третьему, то обязательно есть стрелка, идущая от первого элемента к третьему. Эта особенность графов отражает свойство данных отношений, называемое свойством транзитивности.

Определение. Отношение**R** на множестве **Х** называется **транзитивным**, если из того, что элемент ***х***находится в отношении **R** с элементом ***у*** и элемент ***у*** находится в отношении **R** с элементом ***z***, следует, что элемент ***х*** находится в отношении R с элементом ***z***.

Короче: **R** транзитивно на **X** ↔ ***xRy*** и ***yRz***→ ***xRz***

Граф транзитивного отношения с каждой парой стрелок, идущих от ***х*** к ***у*** и от ***у*** к***z***, содержит и стрелку, идущую от ***х*** к***z*** . Справедливо и обратное утверждение.

Существуют отношения, которые свойством транзитивности не обладают., например, отношение перпендикулярности отрезков.

V. Рассмотрим еще одно отношение.

На множестве дробей { ½; 1/3; ¼; 2/4; 2/6; 3/6} задано отношение равенства.

Какими свойствами обладает данное отношение?

1. Оно рефлексивно, так как любая дробь равна сама себе.
2. Оно симметрично, так как из того, что дробь ***х*** равна дроби ***у*** следует, что и дробь ***у*** равна дроби ***х***.
3. Оно транзитивно, так как из того, что дробь **х** равна дроби ***у*** и дробь ***у*** равна дроби ***z***, следует, что дробь ***х*** равна дроби ***z***.

Таким образом, отношение равенства дробей рефлексивно, симметрично и транзитивно. Говорят, что оно является отношением эквивалентности.

Определение. Отношение **R** на множестве **Х** называется **отношениемэквивалентности,** если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Отношениями эквивалентности являются, например, отношение параллельности прямых, отношение равенства фигур.

Если внимательно посмотреть на графы отношения равенства дробей, отношения параллельности и равенства отрезков, то можно заметить, что они отличаются от графов других отношений тем, что на них видно, как множество, на котором задано отношение, разбивается на несколько подмножеств. Так, на графе отношения равенства дробей выделяются три подмножества: {1/2, 2/4, 3/6}, {1/3, 2/6}, {1/4}. Эти подмножества не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством Х, т.е. имеем разбиение множества Х на попарно непересекающиеся подмножества. Аналогичную картину имеем для отношений параллельности и равенства отрезков.

Вообще, **если на множестве Х задано отношение эквивалентности, то оно разбивает это множество на попарно непересекающиеся подмножества – классы эквивалентности**.

Верно и обратное утверждение: если какое-либо отношение, заданное на множестве Х, определило разбиение этого множества на классы, то это отношение эквивалентности.

Если отношение эквивалентности имеет название, то соответствующее название дается и классам. Например, если на множестве отрезков задать отношение равенства, то множество отрезков разобьется на классы равных отрезков. Множество треугольников отношением подобия разобьется на классы подобных треугольников.

Рассмотрим, например, на множестве Х = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} отношение «иметь один и тот же остаток при делении на 3». Оно порождает разбиение множества Х на классы: в один попадут все числа, при делении которых на 3 получается в остатке 0 (это числа 3, 6, 9), во второй – числа, при делении которых на 3 в остатке получается 1 (это числа 1, 4, 7, 10), и в третий – все числа, при делении которых на 3 в остатке получается 2 (это числа 2, 5, 8). Действительно, полученные подмножества не пересекаются и их объединение совпадает с множеством Х. Следовательно, отношение «иметь один и тот же остаток при делении на 3», заданное на множестве Х, является отношением эквивалентности.

Итак, имея отношение эквивалентности на некотором множестве, мы можем разбить это множество на классы. Но можно поступить и наоборот: сначала разбить множество на классы, а затем определить отношение эквивалентности, считая, что два элемента эквивалентны тогда, когда они принадлежат одному классу рассматриваемого разбиения.

В чем важность такого разбиения на классы? В каждом классе эквивалентности оказываются эквивалентные элементы, т.е. элементы, неразличимые с точки зрения некоторого отношения. Поэтому считают, что класс эквивалентности (множество) определяется любым (одним) своим представителем, т.е. произвольным элементом этого класса. Так, любой класс равных дробей можно задать, указав любую дробь, принадлежащую этому классу.

Определение класса эквивалентности по одному представителю позволяет вместо всех элементов множества изучать совокупность отдельных представителей из классов эквивалентности.

VI. Рассмотрим еще одно отношение – **отношение порядка.**

Слово «порядок» мы употребляем часто как в обыденной жизни, так и на занятиях по математике. Мы говорим о порядке поступления на работу, о порядке слов в предложении; на уроках математики обсуждаем порядок выполнения действий, порядок записи решения уравнения и т.д.

Что же такое порядок? Обратимся к нескольким примерам.

1)Чтобы установить порядок в множестве учащихся класса, достаточно выстроить их по росту. На практике эта процедура сводится к сравнению пар учащихся, т.е. на множестве учащихся рассматривается отношение «быть выше». Это отношение антисимметрично и транзитивно.

2)Множество учащихся класса можно было упорядочить и по возрасту, т.е. задав отношение «быть старше». Это отношение также антисимметрично и транзитивно.

3)Порядок следования букв в русском алфавите обеспечивает отношение «следует», обладающее свойством антисимметричности и транзитивности.

Замеченные свойства отношений, устанавливающих некоторый порядок в множестве, легли в основу определения отношения порядка.

Определение. Отношение **R**на множестве **Х** называется **отношением порядка**, если оно транзитивно и антисимметрично. Множество Х с заданным на нем отношением порядка называется **упорядоченныммножеством**.

**ЗАДАНИЯ:**

1. Записать путем перечисления элементов:

а) множество простых чисел первого десятка;

б) множество букв в слове «грамматика»;

в) множество цифр в числе 222222222;

г) множество правильных несократимых дробей со знаменателем 9;

д) множество несократимых дробей с однозначным знаменателем, заключенных между числами 0 и ½;

е) множество десятичных дробей, при записи которых используется цифра 2 три раза, а цифра 5 один раз.

2. Пусть М – множество букв в слове «платок». Является ли подмножеством множества М множество букв в словах: толпа, каток, парта, потолок?

3.Дано множество К = {70, 106, 223, 304}. Составить подмножества множества К из чисел, у которых:

а) цифры десятков четные;

б) цифры десятков являются нечетными;

в) сумма цифр числа равны 7;

г) сумма цифр числа отлична от 7.

4. Какие элементы входят в пересечение и объединение множеств букв в словах:

а) «математика» и «грамматика»;

б) «насос» и «сосна»;

в) «логово» и «голова»;

г) «мода» и «круг».

5. В классе 40 человек. Из них по русскому языку имеют «тройки» 19 человек, по математике – 17 человек и по физике – 22 человека. Четыре человека имеют «тройки» только по русскому языку, 4 – только по математике и 11 человек – только по физике. Семь человек имеют «тройки» по математике и физике. Пять человек имеют «тройки» по всем трем предметам. Сколько человек учатся без «троек»? Сколько человек имеют «тройки» по двум из трех предметов? (Решить с помощью кругов Эйлера)

6. Выясните, является ли конечным или бесконечным множество К, и укажите, если возможно, его наименьший и наибольший элементы, зная что:

а) К - множество трехзначных четных чисел;

б) К – множество простых чисел, меньших 30;

в) К – множество натуральных делителей числа 505;

г) К – множество корней уравнения

(х – 2) (х + 11) (х – 12) (х + 13) (х – 14) = 0;

д) К – множество целых чисел, удовлетворяющих условию -4,5 <x< 5,5;

е) К – множество целых чисел, удовлетворяющих неравенству |x| < 6;

ж) К – множество решений неравенства x> 15;

з) К – множество решений неравенства x< 12;

и) К – множество трехзначных чисел, кратных 3;

к) К – множество четырехзначных чисел, кратных 5;

л) К – множество составных чисел, меньших 30;

м) К – множество двузначных чисел, кратных 3.

7.Найдите n(A), если: а) A = {0, 2, 5, 7, 17, 25};

б) А – множество натуральных делителей числа 28;

в) А – множество трехзначных чисел;

г) А – множество букв в слове «кошка».

8. С – множество цифр в числе 2347. Является ли множество цифр в числе *х* подмножеством множества С, если:

*х* = 32; *х* = 47; *х* = 43443; *х* = 27433; *х* = 43572?

9.А – множество двузначных чисел. Составьте подмножество множества А, в котором каждый элемент – число:

а) оканчивающееся цифрой 9;

б) записанное одинаковыми цифрами.

10.Записать пересечение, объединение, разность множеств X и Y и изобразить кругами Эйлера:

а) X = {62; 31; 74; 7; 17; 20}

Y = {4; 5; 17; 8; 62; 3; 7}

б) X = {31, 19, 14}

Y = {3; 19; 2; 21; 31; 17; 14}

в) X = {16; 14; 7; 35}

Y = {10; 8; 53; 41}.