Конспект в тетради

Тема «Понятие многогранника. Призма. Площадь поверхности призмы».

[Определение многогранника](https://interneturok.ru/lesson/geometry/10-klass/mnogogranniki/ponyatie-mnogogrannika-prizma-ploschad-poverhnosti-prizmy?konspekt#mediaplayer)

*Определение*. Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, будем называть многогранной поверхностью или многогранником.

[Примеры многогранников](https://interneturok.ru/lesson/geometry/10-klass/mnogogranniki/ponyatie-mnogogrannika-prizma-ploschad-poverhnosti-prizmy?konspekt#mediaplayer)

Рассмотрим следующие примеры многогранников:

1. Тетраэдр *ABCD* – это поверхность, составленная из четырех треугольников: *АВС*, *ADB*, *BDC* и *ADC*(рис. 1).



Рис. 1

2. Параллелепипед *ABCDA1B1C1D1* – это поверхность, составленная из шести параллелограммов (рис. 2).



Рис. 2

[Основные элементы многогранников](https://interneturok.ru/lesson/geometry/10-klass/mnogogranniki/ponyatie-mnogogrannika-prizma-ploschad-poverhnosti-prizmy?konspekt#mediaplayer)

Основными элементами многогранника являются грани, ребра, вершины.

Грани – это многоугольники, составляющие многогранник.

Ребра – это стороны граней.

Вершины – это концы ребер.

Рассмотрим тетраэдр *ABCD*(рис. 1). Укажем его основные элементы.

*Грани*: треугольники *АВС, ADB, BDC, ADC*.

*Ребра*: *АВ, АС, ВС, DC*, *AD*, *BD*.

*Вершины*: *А, В, С, D*.

Рассмотрим параллелепипед *ABCDA1B1C1D1*(рис. 2).

*Грани*: параллелограммы *АА1D1D, D1DСС1, ВВ1С1С, АА1В1В, ABCD, A1B1C1D1.*

*Ребра*: *АА1, ВВ1, СС1, DD1, AD, A1D1, B1C1, BC, AB, A1B1, D1C1, DC.*

*Вершины*: *A, B, C, D, A1,B1,C1,D1.*

[Треугольная призма](https://interneturok.ru/lesson/geometry/10-klass/mnogogranniki/ponyatie-mnogogrannika-prizma-ploschad-poverhnosti-prizmy?konspekt#mediaplayer)

Важным частным случаем многогранника является призма.

Рассмотрим треугольную призму *АВСА1В1С1* (рис. 3).



Рис. 3

Равные треугольники *АВС* и *А1В1С1*расположены в параллельных плоскостях α и β так, что ребра *АА1, ВВ1, СС1* параллельны.

То есть *АВСА1В1С1*– треугольная призма, если:

1) Треугольники *АВС* и *А1В1С1*равны.

2) Треугольники *АВС* и *А1В1С1*расположены в параллельных плоскостях α и β: *ABC*║*А1B1C* (α ║ β).

3) Ребра *АА1, ВВ1, СС1* параллельны.

*АВС* и *А1В1С1*– основания призмы.

*АА1, ВВ1, СС1* – боковые ребра призмы.

Если с произвольной точки *Н1* одной плоскости (например, β) опустить перпендикуляр *НН1* на плоскость α, то этот перпендикуляр называется высотой призмы.

*Определение*. Если боковые ребра перпендикулярны к основаниям, то призма называется прямой, а в противном случае – наклонной.

[Прямая призма](https://interneturok.ru/lesson/geometry/10-klass/mnogogranniki/ponyatie-mnogogrannika-prizma-ploschad-poverhnosti-prizmy?konspekt#mediaplayer)

Рассмотрим треугольную призму *АВСА1В1С1* (рис. 4). Эта призма – прямая. То есть, ее боковые ребра перпендикулярны основаниям.

Например, ребро *АА1* перпендикулярно плоскости *АВС*.  Ребро *АА1* является высотой этой призмы.



Рис. 4

Заметим, что боковая грань *АА1В1В* перпендикулярна к основаниям *АВС* и *А1В1С1*, так как она проходит через перпендикуляр *АА1* к основаниям.

[Наклонная призма](https://interneturok.ru/lesson/geometry/10-klass/mnogogranniki/ponyatie-mnogogrannika-prizma-ploschad-poverhnosti-prizmy?konspekt#mediaplayer)

Теперь рассмотрим наклонную призму *АВСА1В1С1* (рис. 5). Здесь боковое ребро не перпендикулярно плоскости основания. Если опустить из точки *А1* перпендикуляр *А1Н* на *АВС*, то этот перпендикуляр будет высотой призмы. Заметим, что отрезок *АН* – это проекция отрезка *АА1* на плоскость *АВС*.

Тогда угол между прямой *АА1* и плоскостью *АВС* это угол между прямой *АА1* и её *АН* проекцией на плоскость, то есть угол *А1АН*.



Рис. 5

[Четырехугольная призма](https://interneturok.ru/lesson/geometry/10-klass/mnogogranniki/ponyatie-mnogogrannika-prizma-ploschad-poverhnosti-prizmy?konspekt#mediaplayer)

Рассмотрим четырехугольную призму *ABCDA1B1C1D1* (рис. 6). Рассмотрим, как  она получается.

1) Четырехугольник *ABCD* равен четырехугольнику *A1B1C1D1*: *ABCD = A1B1C1D1*.

2) Четырехугольники *ABCD*и*A1B1C1D1*лежат в параллельных плоскостях α и β: *ABC*║*А1B1C* (α ║ β).

3) Четырехугольники *ABCD*и*A1B1C1D1*расположены так, что боковые ребра параллельны, то есть: *АА1║ВВ1║СС1║DD1*.

*Определение*. Диагональ призмы – это отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани.

Например, *АС1* – диагональ четырехугольной призмы *ABCDA1B1C1D1*.

*Определение*. Если боковое ребро *АА1* перпендикулярно плоскости основания, то такая призма называется прямой.



Рис. 6

[Параллелепипед](https://interneturok.ru/lesson/geometry/10-klass/mnogogranniki/ponyatie-mnogogrannika-prizma-ploschad-poverhnosti-prizmy?konspekt#mediaplayer)

Частным случаем четырёхугольной призмы является известный нам параллелепипед. Параллелепипед *ABCDA1B1C1D1*изображен на рис. 7.

Рассмотрим, как он устроен:

1) В основаниях лежат равные фигуры. В данном случае – равные параллелограммы *ABCD* и *A1B1C1D1*: *ABCD* = *A1B1C1D1*.

2) Параллелограммы *ABCD* и *A1B1C1D1* лежат в параллельных плоскостях α и β: *ABC*║*A1B1C1* (α ║ β).

3) Параллелограммы *ABCD* и *A1B1C1D1* расположены таким образом, что боковые ребра параллельны между собой: *АА1║ВВ1║СС1║DD1*.



Рис. 7

Из точки *А1* опустим перпендикуляр *АН* на плоскость *АВС*. Отрезок *А1Н* является высотой.

[Шестиугольная призма](https://interneturok.ru/lesson/geometry/10-klass/mnogogranniki/ponyatie-mnogogrannika-prizma-ploschad-poverhnosti-prizmy?konspekt#mediaplayer)

Рассмотрим, как устроена шестиугольная призма (рис. 8).

1) В основании лежат равные шестиугольники *ABCDEF* и *A1B1C1D1E1F1*: *ABCDEF*= *A1B1C1D1E1F1*.

2) Плоскости шестиугольников *ABCDEF* и *A1B1C1D1E1F1*параллельны, то есть основания лежат в параллельных плоскостях: *ABC*║*А1B1C* (α ║ β).

3) Шестиугольники *ABCDEF* и *A1B1C1D1E1F1*расположены так, что все боковые ребра между собой параллельны: *АА1║ВВ1…║FF1*.



Рис. 8

*Определение*. Если какое-нибудь боковое ребро перпендикулярно плоскости основания, то такая шестиугольная призма называется прямой.

[Правильная призма](https://interneturok.ru/lesson/geometry/10-klass/mnogogranniki/ponyatie-mnogogrannika-prizma-ploschad-poverhnosti-prizmy?konspekt#mediaplayer)

*Определение*. Прямая призма называется правильной, если её основания – правильные многоугольники.

Рассмотрим правильную треугольную призму *АВСА1В1С1*.



Рис. 9

Треугольная призма *АВСА1В1С1*– правильная, это значит, что в основаниях лежат правильные треугольники, то есть все стороны этих треугольников равны. Также данная призма - прямая. Значит, боковое ребро перпендикулярно плоскости основания. А это значит, что все боковые грани – равные прямоугольники.

Итак, если треугольная призма *АВСА1В1С1*– правильная, то:

1) Боковое ребро перпендикулярно плоскости основания, то есть является высотой: *AA1* ⊥ *АВС*.

2) В основании лежит правильный треугольник: ∆*АВС* – правильный.

[Площадь поверхности призмы](https://interneturok.ru/lesson/geometry/10-klass/mnogogranniki/ponyatie-mnogogrannika-prizma-ploschad-poverhnosti-prizmy?konspekt#mediaplayer)

*Определение*. Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех её граней. Обозначается *Sполн*.

*Определение*. Площадью боковой поверхности называется сумма площадей всех боковых граней. Обозначается *Sбок*.

Призма имеет два основания. Тогда площадь полной поверхности призмы:

*Sполн= Sбок+ 2Sосн.*

[Теорема о площади боковой поверхности призмы](https://interneturok.ru/lesson/geometry/10-klass/mnogogranniki/ponyatie-mnogogrannika-prizma-ploschad-poverhnosti-prizmy?konspekt#mediaplayer)

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

Доказательство проведем на примере треугольной призмы.

*Дано*: *АВСА1В1С1* – прямая призма, т. е. *АА1* ⊥ *АВС*.

*АА1 = h.*

*Доказать*: *Sбок= Росн∙ h.*



Рис. 10

*Доказательство*.

Треугольная призма *АВСА1В1С1* – прямая, значит, *АА1В1В, АА1С1С, ВВ1С1С –*прямоугольники.

Найдем площадь боковой поверхности как сумму площадей прямоугольников *АА1В1В, АА1С1С, ВВ1С1С:*

*Sбок = АВ∙ h + ВС∙ h + СА∙ h = (AB + ВС + CА) ∙ h = Pосн ∙ h.*

Получаем, *Sбок= Росн∙ h,*что и требовалось доказать.