Тема: Применение производной при решении прикладных задач.

**Исторические сведения**

Производная – одно из фундаментальных понятий математики. Оно возникло в 17 веке в связи с необходимостью решения задач и физики, и механики, и математики: в первую очередь следующих двух: определения скорости прямолинейного неравномерного движения и построения касательной к произвольной плоской кривой. Ко второй половине 17 века уже был ясно очерчен круг задач, решаемых методами дифференциального исчисления, выявлена связь понятий мгновенной скорости и касательной, разработаны отдельные методы решения задач. Однако еще не был создан алгоритм для решения таких задач, не было создано само дифференциальное исчисление.

Общая теория производных и методов их вычисления, т.е. теория дифференциального исчисления (независимо друг от друга) была разработана И. Ньютоном и Г.В.Лейбницем в конце 17 века.

Исаак Ньютон (годы жизни 1643- 1727гг) один из создателей дифференциального исчисления. Главный его труд « Математические начала натуральной философии» оказал колоссальное влияние на развитие естествознания. Ньютон ввел понятие производной, изучая законы механики, тем самым раскрыл ее физический смысл.

Лейбниц (годы жизни 1646-1716) создатель Берлинской академии наук. Основоположник дифференциального исчисления, ввел большую часть современной символики математического анализа.

Лейбниц пришел к понятию производной, решая задачи проведения касательной к произвольной линии, объяснив тем самым ее геометрический смысл.

Но это не говорит о том, что до них эти вопросы не изучались. Задолго до этого Архимед не только решил задачу на построение касательной к такой сложной кривой, как спираль, но и сумел найти максимум функции f(x)= x2(a-x).

Эпизодически понятие касательной ( которое, как мы знаем, связано с понятием производной) встречалось в работах итальянского математика Н. Тартальи (около 1500- 1557 гг) - здесь касательная появилась в ходе изучения вопроса об угле наклона орудия, при котором обеспечивается наибольшая дальность полета снаряда.

Большой вклад в изучение дифференциального исчисления внесли Лопиталь, Эйлер, Гаусс, Коши. Первый общий способ построения касательной к алгебраической кривой был изложен в «Геометрии» Декарта.

Но, ни Ньютон, ни Лейбниц не дали четкого определения производной. Впервые четкое определение производной было сформулировано Огюстен Коши, и именно это определение стало общепринятым и в настоящее время используется во всех курсах математического анализа. Термин «производная» и ее обозначение y′, f′(x) ввел Лагранж,и мы до сих пор используем эти обозначения.

**Применение физического смысла производной при решении физических задач.**

Применение производной в различных областях науки и техники обширно. При изучении изменяющихся величин очень часто возникает вопрос о скорости, о быстроте происходящего изменения. Так мы говорим о скорости движения самолета, поезда, ракеты, вращения шкива и т. д. Можно говорить о скорости выполнения определенной работы, о скорости протекания химической реакции, о быстроте роста населения в данном городе. О скорости можно говорить по отношению к любой величине, которая изменяется с течением времени. Для всего этого используется понятие производной. Так в физике:

 1. Скорость- это производная от пути по времени V(t)= S′(t)

 2.Ускорение- это производная от скорости по времени а(t)=V′(t)

 3. Мощность- это производная от работы по времени N(t)=A′(t)

 4. Сила тока – это производная от заряда по времениI(t)= q′(t)

 5. Теплоемкость - это производная от количества теплоты по температуре C(t)=Q′(t) и т. д.

Механическое движение это изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени.

Основной характеристикой механического движения является скорость.

Алгоритм нахождения скорости тела с помощью производной.

Если закон движения тела задан уравнением S=S(t), то для нахождения мгновенной скорости тела, в какой – нибудь определенный момент времени надо:

 1) найти производную S′(t)

 2) подставить в полученную формулу заданное значение времени

**Задача.** Автомобиль приближается к мосту со скоростью 72 км/час. У моста висит дорожный знак «36 км /час». За 7 секунд до въезда на мост, водитель нажал на тормозную педаль. С разрешаемой ли скоростью автомобиль въехал на мост, если тормозной путь определяется формулой S=20t-t2(м)

Дано: S=20t-t2(м); V1=72км/час=20м/с; 36км/ч = 10м/с .

Найти: *V*=?

Решение: V=S′(t)=(20t-t2)′= 20-2t; t=7c; V= 20-2∙7=6 м/с;

Следовательно, автомобиль въехал на мост с разрешающей скоростью.

Задача. Тело массой 2кг движется прямолинейно по законуx(t)= t2-3t+2, где t- время , с; х- координата, м. Найдите кинетическую энергии тела через 10с после начала движения.

Дано: m=2; Ек= mv2/2; x(t)= t2-3t+2

Найти: Eк=?

Решение:

V(t)=x′(t)=(t2-3t+2)′=2t-3 м/с

t=10 по условию; V(10)=2∙10-3=17м/с

Eк=2∙172/2=289Дж

 Ответ: 289 Дж

**Производная в электротехнике**

Задача. Найти силу, действующую на материальную точку с массой 0,2 кг, движущуюся прямолинейно по закону S( t)= 2t3–t2, при t=2с.

Дано: S(t)= 2t3 –t2 ; F=m∙a; T=2c

Найти: F=?

Решение:

V=S′(t)=(2t3-t=2t2)′=6t2-2t

m=0,2кг по условию;

a(t)=V′(t)=(6t2 -2t)′=12t-2

a(2)=12∙2-2=22м/с2

F=0,2∙22=4,4 Н

 Ответ:4.4 Н

**Третья группа. Применение геометрического смысла производной**

Если функция возрастает на некотором промежутке, то ее производная во всех точках этого промежутка больше нуля.

Если функция убывает на некотором промежутке, то ее производная во всех точках этого промежутка меньше нуля.

Точки, в которых производная равна нулю, называют стационарными. Если в стационарной точке производная меняет знак с «+» на « - »

И это свойство касательных находит широкое применение.

Великий русский математик Пафнутий Львович Чебышев (годы жизни 1821-1894) писал, что особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения по возможности большей выгоды.

С такими задачами приходится иметь дело представителям самых разных специальностей-

 ● инженеры –технологи стремятся так организовать производство, чтобы выпускать как можно больше продукции;

 ● конструкторы стремятся разработать прибор для космического корабля так, чтобы масса прибора была наименьшей;

 ● экономисты стараются спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались наименьшими.

Но не только людям приходиться решать подобные задачи. Бессознательно с ними справляются и некоторые виды насекомых и других живых существ. Например, форма ячеек пчелиных сот такова, что при заданном объеме на них идет наименьшее количества воска. Пчелам помогает решать задачи инстинкт. Человек же отличается от них тем, что ему на помощь приходит разум. Маркс говорил: «Но и самый плохой архитектор от наилучшей пчелы с самого начала отличается тем, что прежде чем строить ячейку из воска, он уже построил ее в своей голове».

Математикам удалось разработать методы решения задач на нахождение наибольшего и наименьшего значения, или, как их еще называют, задач на оптимизацию с помощью производной (от латинского «оптимум - наилучший).

Задача.

Расход горючего легкового автомобиля (литров на 100 км) в зависимости от скорости Х км/час при движении на четвертой передаче приблизительно описывается функцией f(х)=0,0017Х2-0,18Х +10,2,х>30км/час. При какой скорости расход горючего будет наименьшим?

Решение: исследуем расход горючего с помощью производной

f′(х)=0, 0017\* 2х -0,18 = 0,0034 х- 0,18 х

f′(х)=0, т.е. 0.0034 х - 0,18=0; откуда Х =53

Находим знаки производной

 + 53 -

Следовательно, расход горючего при скорости Х=53 км/час будет наименьшим: f(53)=5,43л.