**Практическая работа № 6**

|  |  |
| --- | --- |
| **Тема:** | Формулы сложения, умножения и полной вероятности. Формула Бернулли. |
| **Цель работы:** | сформировать умение решать задачи на нахождение вероятностей |
| **Порядок выполнения практической работы** | 1. Усвоить теоретический материал по теме: 2. Выполнить и записать задания практической работы в тетрадь. 3. Сдать выполненную практическую работу на проверку преподавателю |

**Теоретическая часть**

**Перестановками** из n элементов называются такие соединения, из которых каждое содержит все n элементов и которые отличаются друг от друга лишь порядком расположения элементов.

Обозначение: Pn.

Pn = 1\*2\*3\*...\*(n – 1)\*n = n!

**Пример 2.1.** Садовник выделил на своем участке 7 грядок для выращивания 7 разных овощей. Сколькими способами может расположить грядки садовник?

***Решение.***

Здесь речь идет о порядке расположения грядок.

N = P7 = 7! = 1\*2\*3\*4\*5\*6\*7 = 5040 (способов).

**Размещениями** из n элементов по m в каждом называются такие соединения, из которых каждое содержит m элементов, взятых из числа данных n элементов, и которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо лишь порядом их расположения.

Обозначение: .

, где 0≤m≤n.

Очевидно, что 

Размещения используют, если порядок расположения важен.

**Пример 2.2.** Сколько разных стартовых четверок можно выбрать из числа 10 волейболистов?

***Решение.***

(способов).

**Размещения с повторениями –** размещения из n элементов по m, в которых могут оказаться одинаковые.



**Сочетаниями** из n элементов по m в каждом называются такие соединения, из которых каждое содержит m элементов, взятых из числа данных n элементов, и которые отличаются друг от друга по крайней мере одним элементом.

Обозначение: 

 где 0≤m≤n.

Очевидно, что 

Сочетания используют, если порядок расположения элементов не важен.

**Пример 2.3.** Правление акционерного общества выбирает из 10 кандидатов трех человек на одинаковые должности. Сколько всевозможных групп по три человека можно составить из 10 кандидатов?

***Решение.*** 

**Теорема умножения вероятностей 1.** Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

Р(АВ) = Р(А) ∙ Р(В).

**Пример 1.** В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

***Решение.*** Пусть А – появление белого шара из первой урны, а В – появление белого шара из второй урны. События А и В независимы.





**Теорема умножения вероятностей 2.**  Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго:

Р(АВ) = Р(А) ∙ РА(В) = Р(В) ∙ РВ(А).

**Пример 2.** В ящике находится 12 деталей, из которых 8 стандартных. Рабочий берет наудачу одну за другой две детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

***Решение.*** Пусть А – событии, что первая взятая деталь стандартная, В – вторая взятая деталь стандартная.

События А и В зависимы.



**Теорема сложения вероятностей 1.** Вероятность суммы попарно несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий.

Р(А+В) = Р(А) + Р(В).

**Теорема сложения вероятностей 2.** Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления, т.е.

Р(А+В) = Р(А) + Р(В) – Р(АВ),

Р(А+В+С)= Р(А) + Р(В) + Р(С) – Р(АВ) – Р(АС) – Р(ВС) – Р(АВС).

# Формула полной вероятности.

Пусть имеется группа событий *H*1, *H*2,..., *Hn*, обладающая следую­щими свойствами:

1) все события попарно несовместны: *Hi*  *Hj* =∅; *i*, *j*=1,2,...,*n*; *i≠j*;

2) их объединение образует пространство элементарных исходов Ω:



Ω *=**.*

Рис.8

В этом случае будем говорить, что *H*1, *H*2,...,*Hn*  образуют **полную группу событий**. Такие события иногда называют **гипотезами**.

Пусть *А* – некоторое событие: *А* ⊂ Ω (диаграмма Венна представлена на рисунке 8). Тогда имеет место **формула полной вероятности:**

*P*(*A*) = *P*(*A*/ *H*1)*P*(*H*1) + *P*(*A*/ *H*2)*P*(*H*2) + ...+ *P*(*A*/ *Hn*)*P*(*Hn*) =

Доказательство. Очевидно: *A =* , причем все события  (*i* = 1,2,...,*n*) попарно несовместны. Отсюда по теореме сложения вероятностей получаем

*P*(*A*) = *P*() + *P*() +...+ *P*(

Если учесть, что по теореме умножения *P*() = *P*(*A/H*i)*P*(*H*i) (*i*= 1,2,...,*n*), то из последней формулы легко получить приведенную выше формулу полной вероятности.

Пример. В магазине продаются электролампы производства трех заводов, причем доля первого завода - 30%, второго - 50%, третьего - 20%. Брак в их продукции составляет соответственно 5%, 3% и 2%. Какова вероятность того, что случайно выбранная в магазине лампа оказалась бракованной.

Пусть событие *H*1 состоит в том, что выбранная лампа произведена на первом заводе, *H*2 на втором, *H*3 - на третьем заводе. Очевидно:

*P*(*H*1) = 3/10, *P*(*H*2) = 5/10, *P*(*H*3) = 2/10.

Пусть событие *А* состоит в том, что выбранная лампа оказалась бракованной; *A/Hi* означает событие, состоящее в том, что выбрана бракованная лампа из ламп, произведенных на *i*-ом заводе. Из условия задачи следует:

*P* (*A/H*1) = 5/10; *P*(*A/H*2) = 3/10; *P*(*A/H*3) = 2/10

По формуле полной вероятности получаем



# Формула Байеса

Пусть *H*1,*H*2,...,*Hn* - полная группа событий и *А* Ω – некоторое событие. Тогда по формуле для условной вероятности

 (\*)

Здесь *P*(*Hk* /*A*) – условная вероятность события (гипотезы) *Hk* или вероятность того, что *Hk* реализуется при условии, что событие *А* произошло.

По теореме умножения вероятностей числитель формулы (\*) можно представить в виде

*P* = *P*= *P*(*A* /*Hk*) *P*(*Hk*)

Для представления знаменателя формулы (\*) можно использовать формулу полной вероятности

*P*(*A*)

Теперь из (\*) можно получить формулу, называемую **формулой Байеса**:



По формуле Байеса исчисляется вероятность реализации гипотезы *Hk* при условии, что событие *А* произошло. Формулу Байеса еще называют **формулой вероятности гипотез.** Вероятность *P*(*Hk*) называют априорной вероятностью гипотезы *Hk*, а вероятность *P*(*Hk* /*A*) – апостериорной вероятностью.

Пример. Рассмотрим приведенную выше задачу об электролампах, только изменим вопрос задачи. Пусть покупатель купил электролампу в этом магазине, и она оказалась бракованной. Найти вероятность того, что эта лампа изготовлена на втором заводе. Величина *P*(*H*2) = 0,5 в данном случае это априорная вероятность события, состоящего в том, что купленная лампа изготовлена на втором заводе. Получив информацию о том, что купленная лампа бракованная, мы можем поправить нашу оценку возможности изготовления этой лампы на втором заводе, вычислив апостериорную вероятность этого события.

Выпишем формулу Байеса для этого случая



Из этой формулы получаем: *P*(*H*2 /*A*) = 15/34. Как видно, полученная информация привела к тому, что вероятность интересующего нас события оказывается ниже априорной вероятности.

**Задачи с решениями.**

1.В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй – 8 белых и 2 черных. При перевозке из первой урны во вторую урну перекатились два шара. После того, как шары во второй урне перемешались, из неё выкатился шар. Найти вероятность того, что выкатившийся из второй урны шар белый.

Пусть событие *Н*1 состоит в том, что из первой урны во вторую перекатились два белых шара, событие *Н*2 состоит в том, что перекатились два чёрных шара, а событие *Н*3 состоит в том, что перекатились шары разного цвета. Можно вычислить вероятности *Р*(*Н*1) =  = 7/15, *Р*(*Н*2) =  = 1/15, *Р*(*Н*3) =  = 7/15 (при решении задачи полезно проверить выполнение необходимого условия ).

Если реализовалась гипотеза *Н*1, то во второй урне оказалось 10 белых и 2 черных шара. Обозначим через *А* событие, заключающееся в том, что из второй урны выкатился белый шар. Тогда *Р*(*А/Н*1) =  = 5/33. Если реализовалась гипотеза *Н*2, то во второй урне оказалось 8 белых и 4 чёрных шара, и *Р*(*А/Н*2) =  = 4/33. Легко показать, что *Р*(*А/Н*3) =  = 3/22. Теперь можно воспользоваться формулой полной вероятности:

*Р*(*А*) = (5/33)⋅(7/15) + (4/33) (1/15) + (3/22) (7/15) = 47/330

*Формула Бернулли*

1. Вероятность того, что событие А наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждый из которых имеет ровно два исхода вычисляется по формуле Бернулли 

*Пример 1*: Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 приобретенных билетов 2 окажутся выигрышными.

*Решение:*



1. Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна 

*Пример 2*: Прибор состоит из шести элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за определенное время равна 0,6. Для безотказной работы прибора необходимо, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность, что за данное время прибор будет работать безотказно?

*Решение*:



1. Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m1 и не более m2 раз вычисляется по формуле 

*Пример 3*: Найти вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

*Решение:*



Разобрать теоретический материал и решение примеров.

Видеоуроки по теме <https://resh.edu.ru/subject/lesson/4089/main/131707/>

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/4929/main/38416/>

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/4079/main/38323/>